

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Automação e Sistemas

Pós Graduação em Controle e Automação

CS01- Controle Clássico

Profs Edson Roberto De Pieri
Eugênio Castelan

Agosto 1999

Introdução Geral

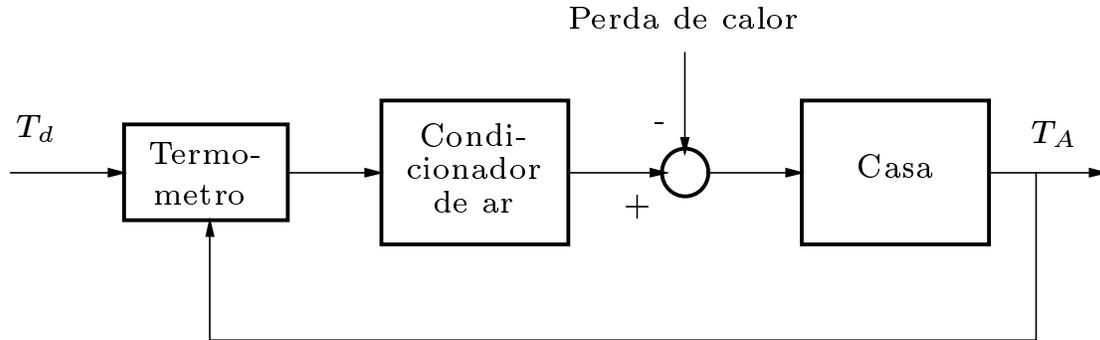
Controle: O termo controle refere-se a diferentes tipos de relações homem-máquina:

Exemplos: {
televisor
forno de microondas
aparelhos de CDs
aquecimento central de água
máquina de lavar

Exemplos: {
aviões, trens, metrô
fornos industriais
robôs manipuladores
tráfego urbano e aéreo
antenas, etc

Introdução Geral

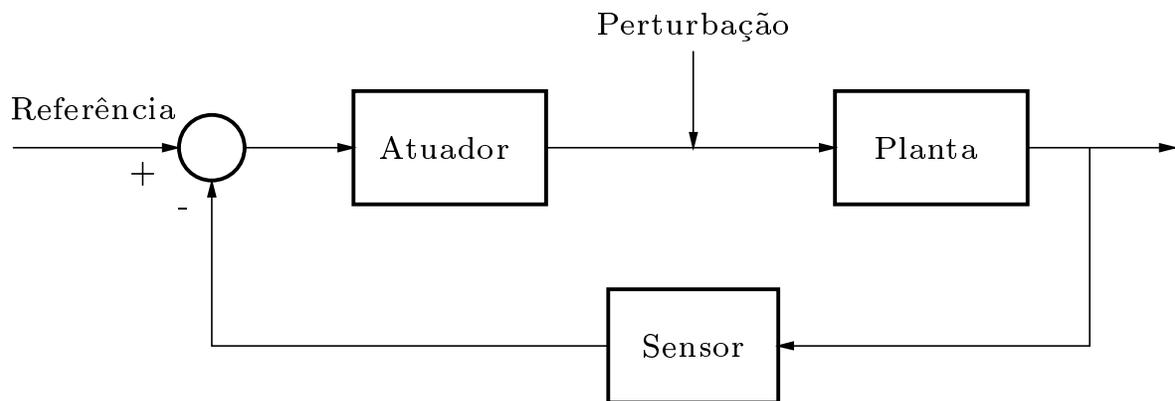
Controle de temperatura:



{	T_d :	Temperatura desejada
	T_A :	Temperatura ambiente
	Varável de entrada:	T_d
	Varável de saída:	T_A
	Perda de calor:	Perturbação

Introdução Geral

Componentes básicos de um sistema de controle



Principais Elementos {

- Processo ou Planta
- Perturbações ou distúrbios
- Atuadores
- Sensores
- Entrada do processo
- Saída do Processo

Introdução Geral

Etapas do projeto de um sistema de controle:

- Estabelecimento de um conjunto de especificações de desempenho para definição do problema de controle
- Modelagem matemática do sistema físico e, eventualmente, simplificação de modelo
- Análise do modelo (em geral via simulação)
- Análise de desempenho do sistema original
- Definição do controlador
- Realização do projeto utilizando pacotes de simulação (Projeto auxiliado por computador)
- Verificação de desempenho e comparação de desempenho segundo o modelo simplificado e modelo original
- Implementação do controlador

Introdução Geral

Breve Histórico

- Cornelis Drebel (1670) - Controle de temperatura para incubadora
- James Watt (1788) - Controle de Máquinas e realimentação
- Desenvolvimento de mecanismos utilizando a teoria de Maxwell
- 1826-1835 - Controle de velocidade de telescópios e aplicações em astronomia. Verificação experimental do problema de instabilidade.
- Sistematização do problema da estabilidade de sistemas realimentados
- 1877 E. J. Routh vence "Adams Prize" com o trabalho sobre critério de estabilidade (Critério de Routh)
- 1893 A. M. Lyapunov apresenta os primeiros desenvolvimentos sobre a estabilidade do movimento
- Desenvolvimento de métodos frequenciais de estabilidade: Nyquist (1932), Bode (1945)

- 1936 surge o primeiro controlador do tipo PID. Nesta época surge também o conceito de servomecanismo
- Técnicas de projeto de controladores desenvolvida por Evans (1948). Técnica do lugar das raízes
- Década de 50 Bellman e Kalman nos Estados Unidos e Pontryagin na União Soviética consideram o problema de controle sob a representação de equações diferenciais e representação por variáveis de estado
- Aparecimento de aplicações de controle utilizando computadores
- Os trabalhos de Lyapunov são reexaminados sob a ótica da teoria de controle
- Aparecimento do controle digital na década de 70

Introdução Geral

Característica multidisciplinar: Em quase todos os campos do conhecimento, a área de controle faz-se presente.

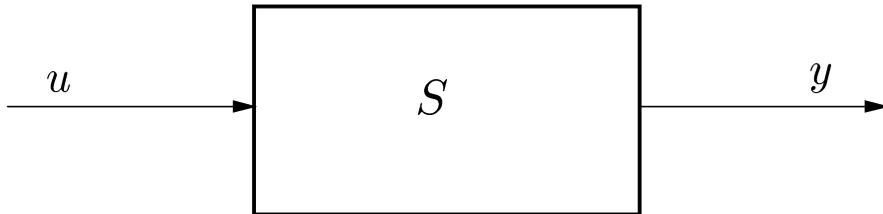
- Engenharia elétrica, mecânica, química, computação, naval, civil, sanitária, etc.
- Economia, Física, Química
- Aeronáutica, astronáutica
- Biologia. ecologia
- Outros

Conceitos utilizados

- Números complexos, álgebra, equações diferenciais, etc.
- Modelagem, comportamento físico e características de sistemas, funcionamento de atuadores, de sensores, de instrumentos de aquisição de dados, etc.
- Pacotes de simulação e linguagens de programação
- Outros, dependendo das aplicações

Principais termos usados em controle

Sistema: Frequentemente representado por um diagrama de blocos:



Um sistema pode ser um equipamento ou um fenômeno físico.

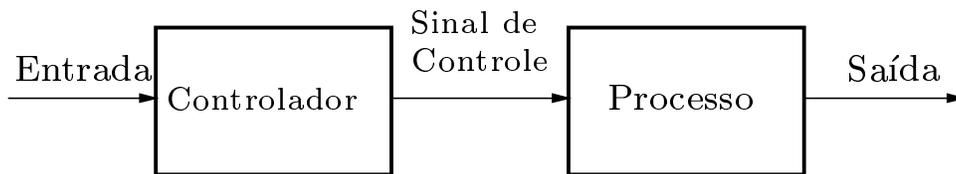
- Linhas com setas representam sinais
- Caixas representam sistemas

Planta: É o equipamento a ser controlado (motor, atuador, reator, etc)

Processo: É todo fenômeno, natural ou artificial, que evoluem segundo uma dinâmica (processo químico, biológico, etc.)

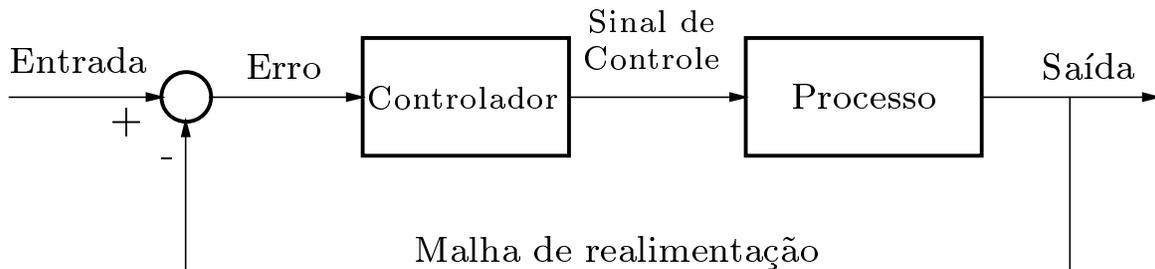
Perturbação externa ou distúrbio: São sinais com efeitos indesejados sobre o processo

Sistema em malha aberta: É um sistema composto por uma planta ou processo e um controlador sem que haja interferência do sinal de saída no sinal de controle.



A saída é sensível aos fenômenos indesejáveis ao processo (perturbações externas, variações nos parâmetros, etc). É de custo relativamente baixo.

Sistema em malha fechada: Ou sistema realimentado. Uma parcela do sinal de saída é realimentado junto à entrada do sistema.



Os sistemas em malha fechada apresentam melhor desempenho na presença de perturbações externas e incertezas. Possuem custos mais elevados.

Servomecanismo: É um sistema realimentado para controle automático de posição, velocidade e aceleração

Sinais padronizados para testes

Para podermos modelar um sistema físico devemos submetê-los a diferentes sinais de entrada, determinando os efeitos produzidos. Ou seja medindo as saídas.

Sinais de tempo contínuo: A variável t é contínua. O sinal é conhecido como sendo analógico.

Sinais de tempo discreto: A variável t é discreta, assumindo valores em determinados instantes de tempo.

Os sinais mais utilizados são:

- Função degrau unitário

$$r(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Função rampa unitária

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Função parábola

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Função polinomial

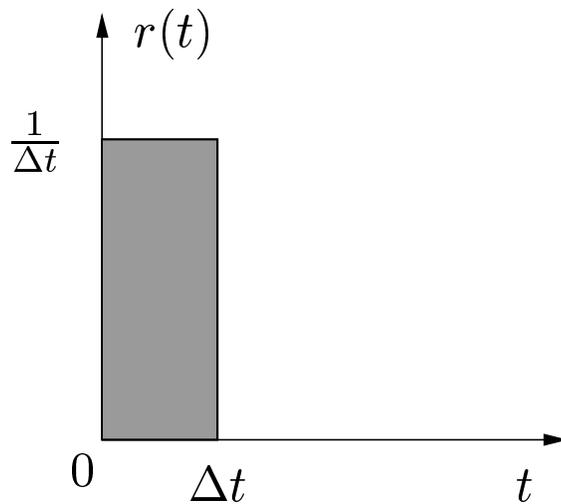
$$r(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Função senoidal

$$r(t) = A \sin \omega t$$

A : amplitude do sinal, ω : frequência do sinal

- Função impulso unitário (Delta de Dirac)



$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{\Delta t} = \delta t$$

Revisão

Objetivo: O objetivo desta seção é fazer uma pequena revisão de números complexos, álgebra de números complexos, variáveis complexas e funções complexas.

Números complexos

A necessidade de manipular números complexos surge da resolução de equações do tipo:

$$s^2 + 1 = 0$$

Usando a notação $j = \sqrt{-1}$, todos os números encontrados em aplicações de engenharia podem ser escritos da forma:

$$z = x + jy$$

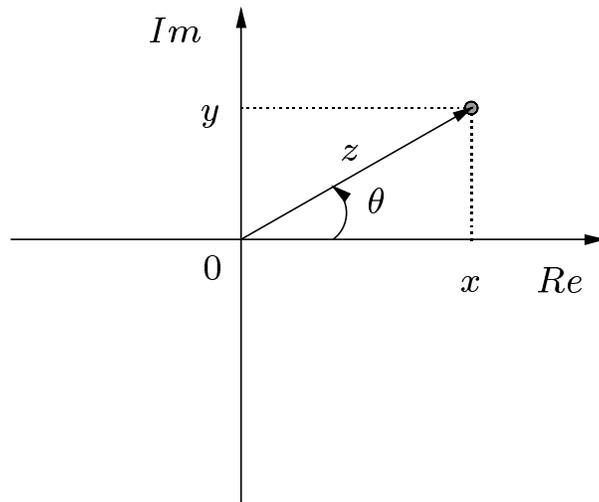
z : número complexo

x : parte real

y : parte imaginária

Interpretação: Um número complexo z pode ser considerado como um ponto no plano complexo ou como o segmento unindo a origem até o ponto.

Representação de z no plano complexo:



O ângulo de um número complexo z é o ângulo entre o segmento e a parte positiva do eixo real. É considerado positivo no sentido anti-horário.

O comprimento ou magnitude de z e o ângulo de z são dados por:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Na forma polar o número complexo z é dado por:

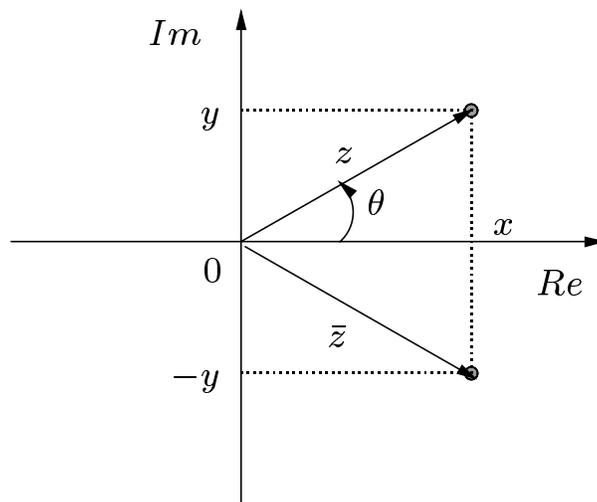
$$z = |z| \angle \theta$$

O complexo conjugado de $z = x + jy$ é definido por:

$$\bar{z} = x - jy$$

possui a mesma parte real e a parte imaginária com sinal trocado.

Representação de z e \bar{z} no plano complexo:



Fórmula de Euler: $\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Resumo

$$\text{Forma Retangular} \quad \begin{cases} z = x + jy \\ z = |z|(\cos \theta + j \sin \theta) \end{cases}$$

$$\text{Forma Polar} \quad \begin{cases} z = |z| \angle \theta \\ z = |z| e^{j\theta} \end{cases}$$

A conversão da forma polar para a retangular é:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

A conversão da forma retangular para a complexa é:

$$x = |z| \cos \theta \quad ; \quad y = |z| \sin \theta$$

Álgebra de números complexos

Escolhendo-se uma forma de representação - forma retangular ou forma polar - as operações algébricas usuais podem ser facilmente realizadas.

Igualdade de números complexos: Dois números complexos z e w são iguais se e somente se a parte real e a parte imaginária deles forem iguais.

$$z = x + jy$$

$$w = u + jv$$

$$z = w \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases}$$

Adição de números complexos: Dois números complexos z e w podem ser somados, somando-se separadamente as partes reais e imaginárias

$$z + w = (x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v)$$

Subtração de números complexos: Dois números complexos z e w podem ser subtraídos, subtraindo-se separadamente as partes reais e imaginárias

$$z - w = (x + jy) - (u + jv) = (x - u) + j(y - v)$$

Multiplicação de números complexos: A

multiplicação de dois números complexos z e w é dada por:

$$zw = (x + jy)(u + jv) = xu + jyu + jxv + j^2yv$$

$$zw = (xu - yv) + j(xv + yu)$$

Usou-se o fato que $j^2 = -1$. Na forma polar temos:

$$z = |z|\angle\theta \quad ; \quad w = |w|\angle\phi \quad \Rightarrow \quad zw = |z||w|\angle\theta + \phi$$

Divisão de números complexos: A divisão de dois números complexos z e w é mais simples de ser realizada na forma polar:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|\angle\theta}{|w|\angle\phi} = \frac{|z|}{|w|}\angle\theta - \phi$$

Na forma retangular é necessário multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{x + jy}{u + jv} = \frac{(x + jy)(u - jv)}{(u + jv)(u - jv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + j\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$$

Potenciação e raízes:

$$z^n = (|z|\angle\theta)^n = |z|^n \angle n\theta$$

$$z^{\frac{1}{n}} = (|z|\angle\theta)^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \angle \frac{\theta}{n}$$

Funções Complexas

Um número complexo possui, portanto, parte real e parte imaginária. Se a parte real ou a parte imaginária são variáveis o número complexo é chamado de variável complexa. Seja $s = \sigma + j\omega$ uma variável complexa.

Uma função complexa $F(s)$, função da variável complexa s , possui uma parte real e uma parte imaginária.

$$F(s) = F_x + jF_y$$

O módulo e o ângulo de $F(s)$ são:

$$|F(s)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad ; \quad \angle F(s) = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$

O complexo conjugado de $F(s)$, denotado por $\bar{F}(s)$ é:

$$\bar{F}_s = F_x - jF_y$$

As funções complexas mais comumente encontradas em análise e projeto de sistemas lineares são funções do tipo:

$$F(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

As raízes do denominador $s = -p_1, s = -p_2, \dots, s = -p_n$ são os pólos de $F(s)$. Se forem todas distintas, dizemos que a função possui pólos simples e se forem repetidas $F(s)$ possui pólos múltiplos, de multiplicidade k (onde k é o número de vezes que o mesmo pólo se repete).

As raízes do numerador $s = -z_1, s = -z_2, \dots, s = -z_m$ são os zeros de $F(s)$, podendo ser simples ou múltiplos.

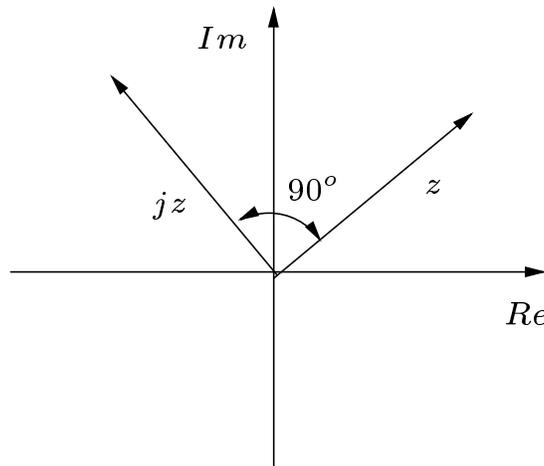
Exemplos

a) Seja um número complexo $z = x + jy$, multiplicar por j interpretando graficamente a operação.

$$jz = j(x + jy) = jx + j^2y = -y + jx$$

Realizando a operação na forma polar, lembrando que $j = 1 \angle 90^\circ$:

$$z = |z| \angle \theta \Rightarrow jz = 1 \angle 90^\circ |z| \angle \theta = |z| \angle \theta + 90^\circ$$

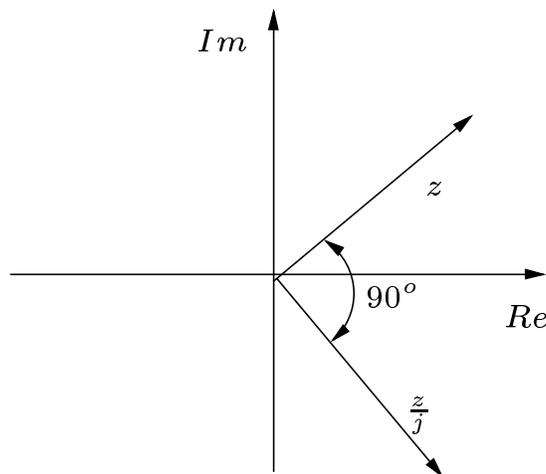


A multiplicação de um número complexo por j corresponde a uma rotação no sentido anti-horário de 90° .

b) Seja um número complexo $z = x + jy$, dividir por j interpretando graficamente a operação. Realizando a operação na forma polar:

$$z = |z| \angle \theta \Rightarrow \frac{z}{j} = \frac{|z| \angle \theta}{1 \angle 90^\circ} = |z| \angle \theta - 90^\circ$$

Graficamente temos:



A divisão de um número complexo por j corresponde a uma rotação no sentido horário de 90° .

$$c)(8.66 - j5)^3 = (10\angle 30^\circ)^3 = 1000\angle -90^\circ = 0 - j1000 = -j1000$$

$$d)(2.12 - 2.12j)^{\frac{1}{2}} = (9\angle -45^\circ)^{\frac{1}{2}} = 3\angle -22.5^\circ$$

e) Dada a função $G(s)$ encontrar os pólos e os zeros.

$$G(s) = K \frac{(s + 2)(s + 10)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 15)^2}$$

Zeros: $s = -2, s = -10$

Pólos: $s = 0, s = -1, s = -5$ e $s = -15$ (multiplicidade 2)

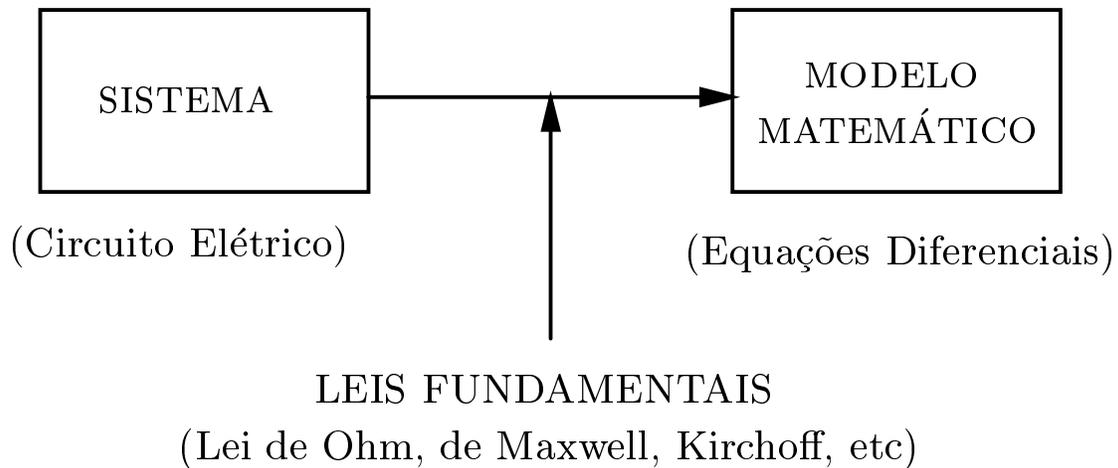
Modelagem Dinâmica de Sistemas

1. Introdução
2. Sistemas Mecânicos
3. Sistemas Elétricos
4. Sistemas Eléto-mecânicos
5. Linearização
6. Resolução de Equações Diferenciais Lineares
7. Exemplos

Introdução

Objetivo: Introduzir os princípios básicos para a modelagem de sistemas físicos.

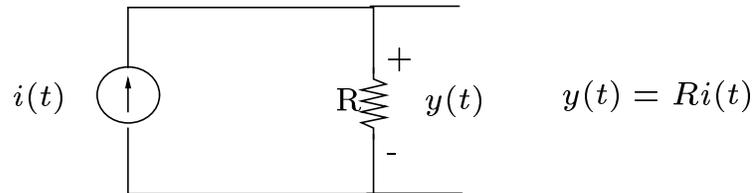
A representação matemática de um sistema é obtida aplicando-se as leis fundamentais que regem o seu comportamento. Por exemplo:



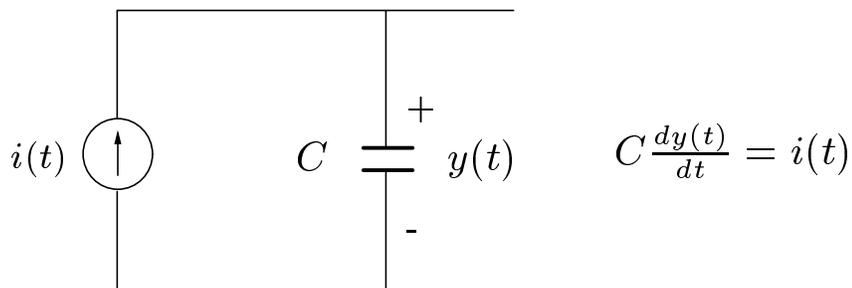
Importância da Modelagem de Sistemas: Na maioria dos casos, o controle de um dado sistema necessita de uma representação matemática ou de um modelo associado.

Outras técnicas: Identificação, estratégias de controle que não necessitam do modelo do sistema (controle nebuloso, inteligência artificial, redes neurais, etc.)

Sistema Algébrico: Quando o modelo matemático é composto por uma ou mais equações algébricas. A resposta depende somente do valor da variável de entrada em t .



Sistema Dinâmico: Quando o modelo matemático é composto por uma ou mais equações diferenciais. Sua resposta no instante t não pode ser determinada somente com o conhecimento das variáveis de entrada em t .



A saída do circuito é dada por:

$$\int_{y(0)}^{y(t)} dy(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \Rightarrow y(t) = y(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Sistemas Mecânicos

A obtenção do modelo matemático ou das equações de movimento de um sistema mecânico está associada à aplicação da Lei de Newton:

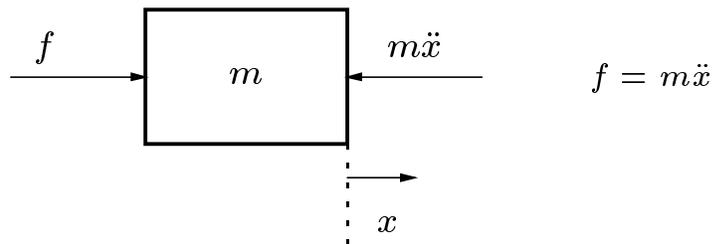
$$F = ma$$

F : representa as forças aplicadas

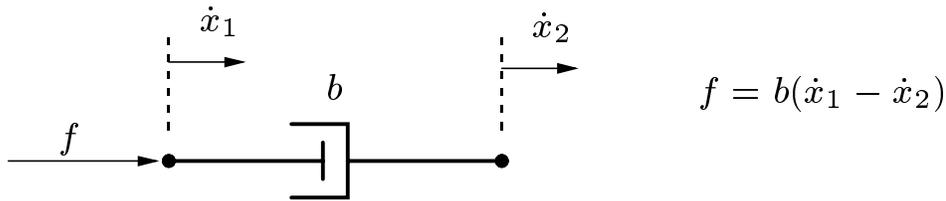
a : representa o vetor de acelerações com respeito a um referencial inercial

m : é a massa do corpo considerado

Força de inércia: é devida à aceleração de uma massa m em relação a um referencial inercial.

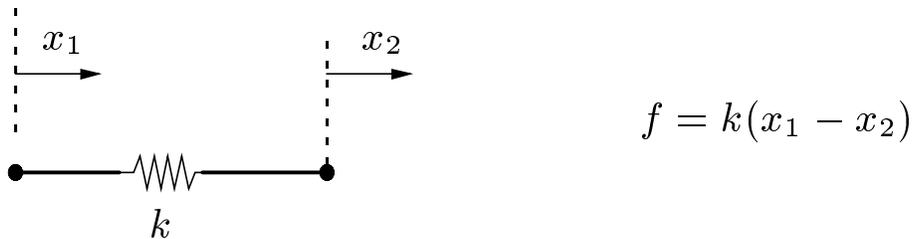


Força de atrito: é devida à diferença entre as velocidades relativas nos terminais de um amortecedor.



b : coeficiente de atrito viscoso

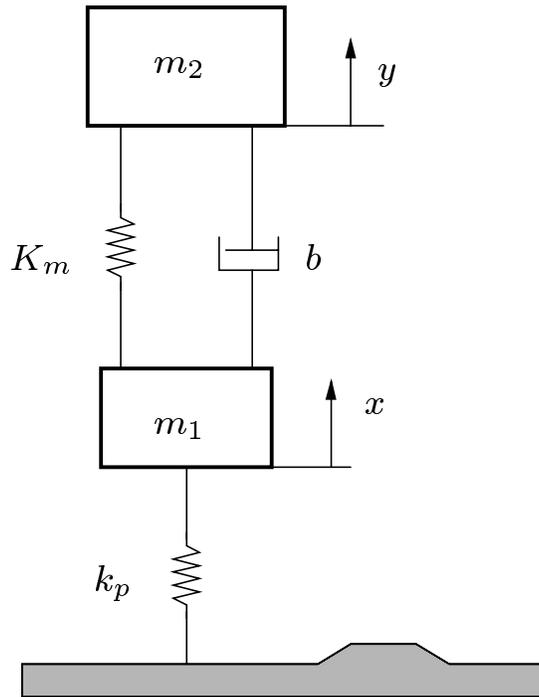
Força elástica: é devida ao deslocamento relativo dos dois terminais de uma mola.



k : coeficiente de amortecimento da mola

Obs. A massa, a mola ou o amortecedor foram considerados como elementos pontuais ou concentrados.

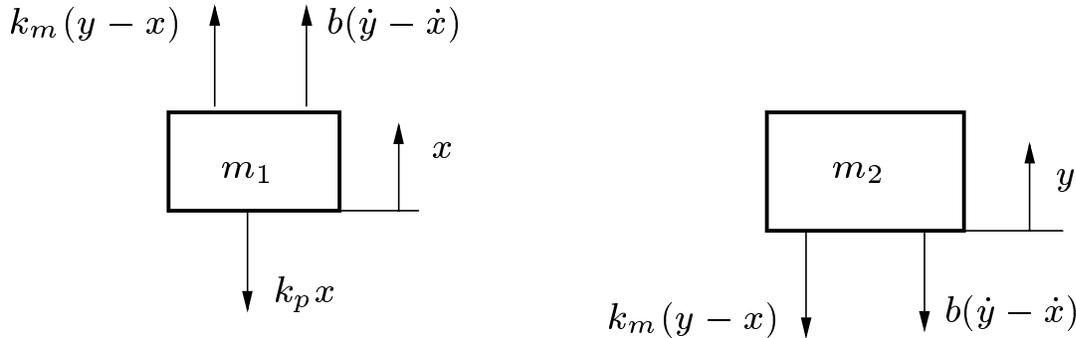
Exemplo: Considere o estudo da suspensão de um veículo. Se considerarmos apenas uma das quatro rodas do veículo podemos representar o sistema conforme a figura abaixo:



Para a modelagem de sistemas mecânicos mais complicados utilizamos o Princípio de D'Alembert:

Em qualquer instante, a soma de todas as forças que agem sobre um sistema isolado, incluindo a força de inércia, que se opõe ao movimento, é nula

Usando os diagramas de corpos livres (1 para cada massa) temos:



Aplicando o princípio de D'Alembert para cada uma das massas e levando-se em conta a direção dos referenciais x e y temos:

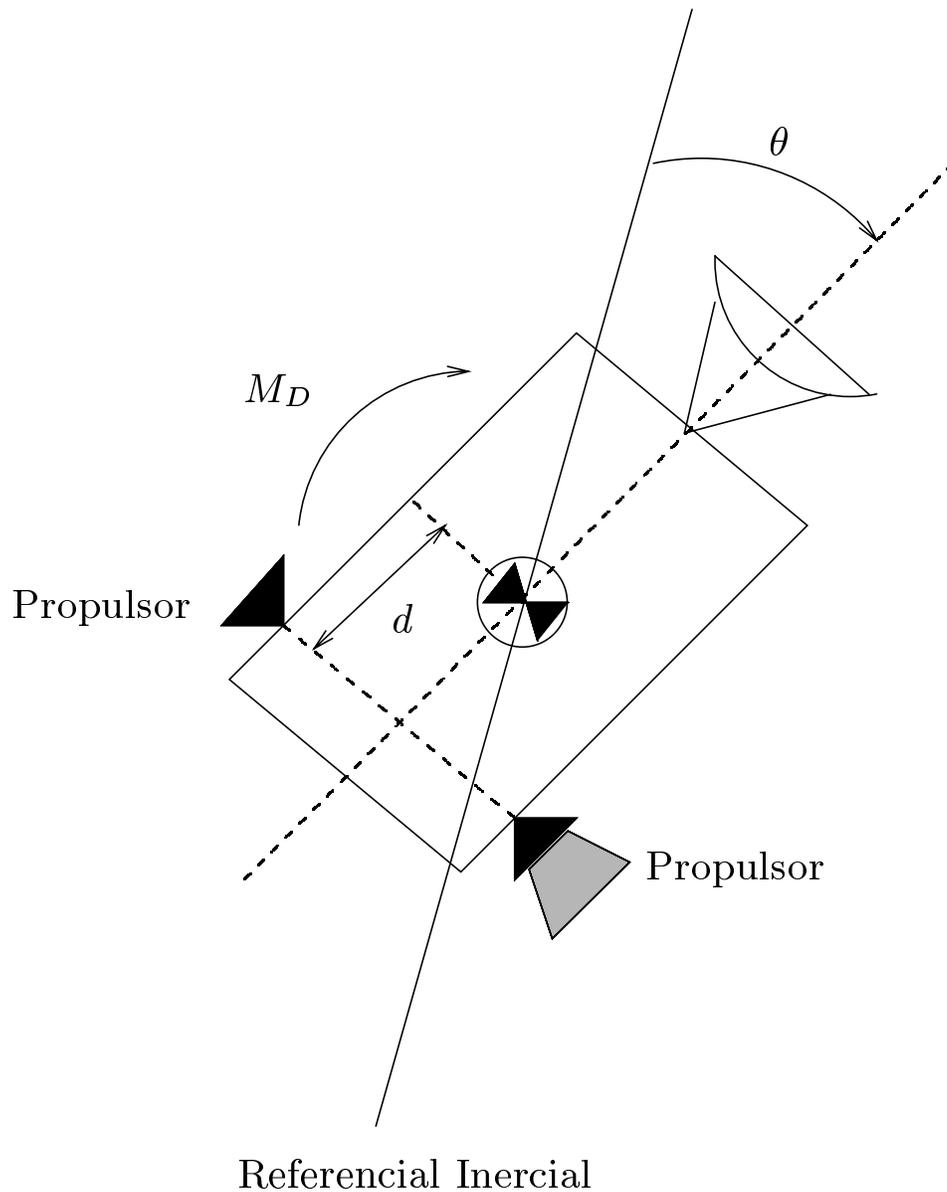
$$\begin{aligned} b(\dot{y} - \dot{x}) + k_m(y - x) + k_p x &= m_1 \ddot{x} \\ -k_m(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x}) &= m_2 \ddot{y} \end{aligned}$$

Reescrevendo as equações temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{b}{m_1}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{k_m}{m_1}(x - y) + k_p x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_2}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_m}{m_2}(y - x) &= 0 \end{aligned}$$

- Cada massa \rightarrow uma equação diferencial de segunda ordem
- Molas e o amortecedores supostos lineares

Exemplo: Considere o esquema de um satélite em órbita:



F_c é a força de controle, responsável pela orientação do satélite, M_D representa as forças de perturbação.

Trata-se da modelagem de um sistema cujo movimento é rotacional. Neste caso a lei de Newton deve ser modificada para:

$$M = I\alpha$$

M : é a soma de todos os momentos em torno do centro de massa do corpo

I : é o momento de inércia do corpo em torno do seu centro de massa

α : é a aceleração angular do corpo

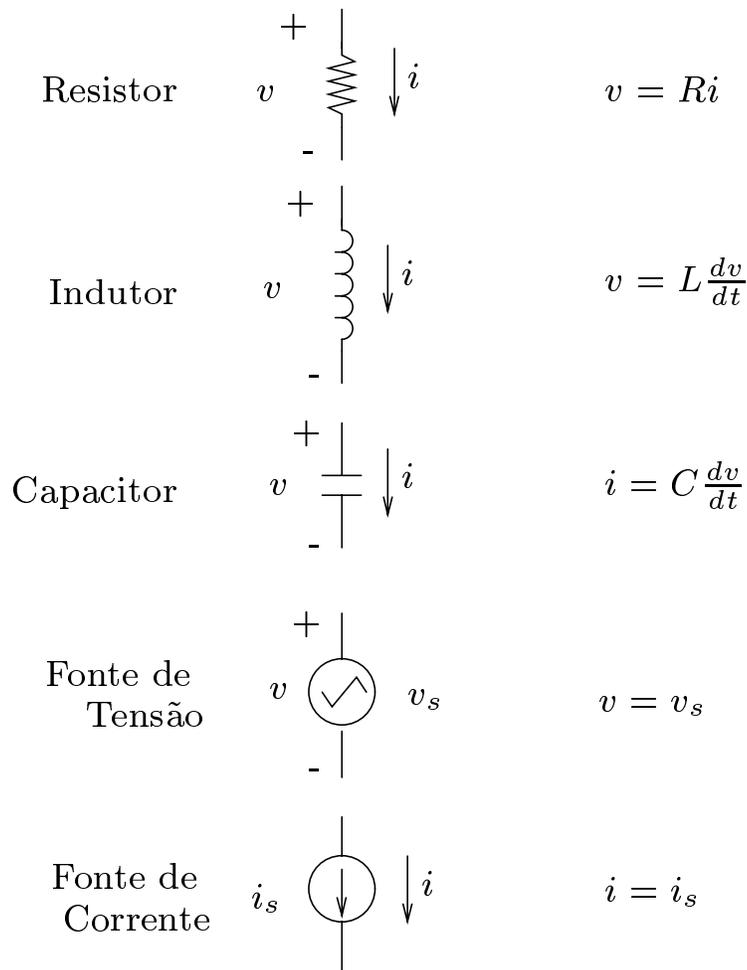
O movimento do satélite é permitido somente em torno do eixo perpendicular à página. O ângulo θ que descreve a orientação do satélite deve ser medido com relação a um sistema inercial. A equação é dada por:

$$F_x d + M_D = I\ddot{\theta}$$

Sistemas Elétricos

Circuitos elétricos consistem da interconexão entre fontes de tensão, de corrente e diversos componentes: resistores, capacitores, indutores, etc

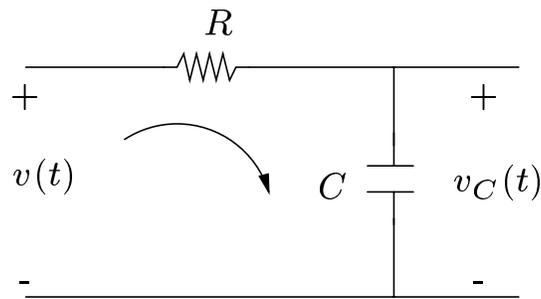
As relações corrente-tensão para alguns dispositivos elétricos com características lineares são dadas a seguir:



As equações básicas de um circuito elétrico são dadas pelas leis de Kirchoff: lei das correntes e leis das tensões:

- *Para uma dada junção de um circuito elétrico, a soma algébrica das correntes que chegam é igual à soma das correntes que saem*
- *A soma algébrica das tensões numa dada malha é zero*

Circuito RC:



Sejam $v(t)$: tensão de entrada, v_R : tensão no resistor e v_C : tensão no capacitor (tensão de saída). Utilizando a lei das tensões de Kirchoff temos:

$$v_R(t) + v_C(t) = v(t)$$

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

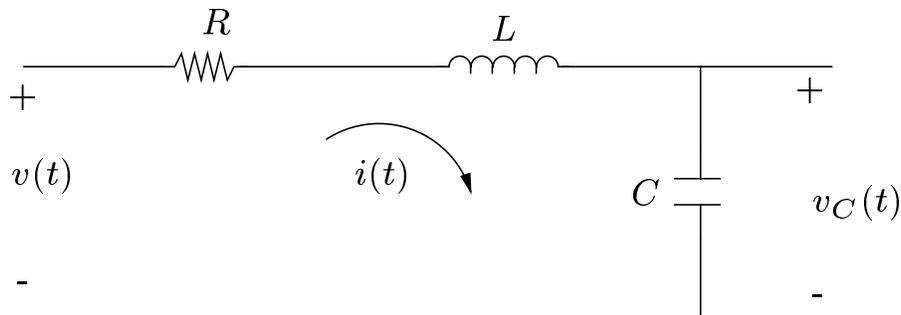
usando o fato que:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

A equação diferencial de primeira ordem que representa a dinâmica do circuito RC é dada por:

$$RC\dot{v}_C + \frac{1}{C}v_C(t) = v(t) \quad ; \quad \dot{v}_C = \frac{dv_C}{dt}$$

Circuito RLC:



Sejam $v(t)$: tensão de entrada, v_R : tensão no resistor, v_L : tensão no indutor, e v_C : tensão no capacitor (tensão de saída). Utilizando a lei das tensões de Kirchoff temos:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v(t)$$

O circuito RLC é, portanto, modelado por uma equação diferencial de segunda ordem:

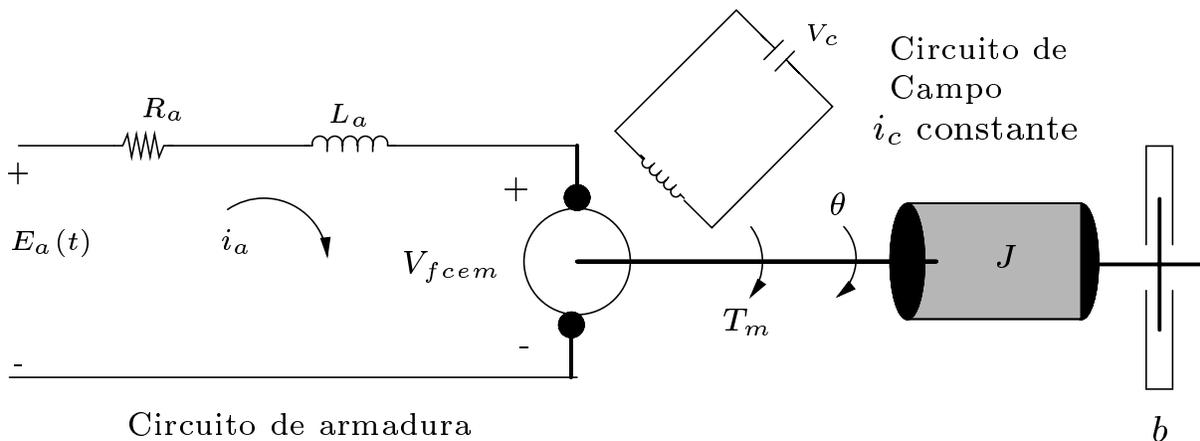
$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + \frac{1}{C}v_C(t) = v(t)$$

Sistemas Eletromecânicos

O motor de corrente contínua (motor DC, motor CC, servomotor DC, etc) é um atuador bastante utilizado em sistemas de controle: posicionamento de antenas, de robôs manipuladores, etc.

O servomotor pode ser operado em dois modos: corrente de campo (estator) constante com uma tensão ajustável aplicada à armadura (rotor) e tensão constante e corrente de campo ajustável.

O circuito abaixo representa o motor DC controlado por armadura.



R_a	resistência de armadura
L_a	indutância da armadura
i_a	corrente de armadura
i_c	corrente de campo
$E_a(t)$	tensão aplicada à armadura
$V_{f_{cem}}$:	força contra eletromotriz
θ	deslocamento angular do eixo motor
T	torque desenvolvido pelo motor
J	Momento de Inércia equivalente do motor
b	coeficiente de atrito viscoso equivalente do motor e da carga

O torque T desenvolvido pelo motor é proporcional à corrente de armadura e à corrente de campo:

$$T = K_1 i_a(t) i_c(t)$$

Como a corrente de campo é suposta constante, então

$$T = K i_a(t)$$

onde K é a constante de torque do motor.

Quando a armadura estiver girando é induzida uma tensão

na armadura proporcional à velocidade angular:

$$V_{f_{cem}} = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

Para o circuito de armadura é:

$$V_{R_a} + V_{L_a} + V_{f_{cem}} = E_a(t)$$

A equação diferencial é dada por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = E_a(t)$$

A corrente de armadura produz o torque T que é aplicado à inércia e ao atrito:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K i_a$$

Portanto o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} &= E_a(t) \\ J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} &= K i_a \end{aligned}$$

representa o comportamento do sistema mecânico e do sistema elétrico.

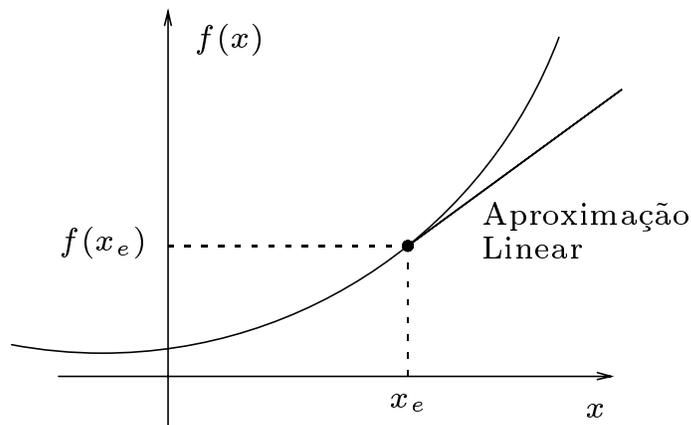
Linearização

Seja $f(x)$ uma função contínua que admite derivadas de ordem até ∞ . A aproximação linear de $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = f(x_e) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_e} (x - x_e)$$

Para valores próximos de x_e esta aproximação deve ser boa e a medida que distanciamos de x_e a aproximação perde sua validade.

Interpretação gráfica:



Para o caso de funções de n variáveis a aproximação linear em torno do ponto $x_e = (x_{e1} \ x_{e2} \ \cdots \ x_{en})$ é:

$$f(x) = f(x_e) + \nabla(x_e)(x - x_e)$$

onde $\nabla(x_e)$ é o vetor gradiente de $f(x)$ calculado em x_e

Exemplo: Calcule aproximadamente $\sqrt{64.16}$ utilizando uma aproximação linear.

Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_e = 64$, então

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_e) + \frac{1}{\sqrt{x_e}}(x - x_e) \\f(64.16) &= f(64) + \frac{1}{\sqrt{64}}0.16 = 8 = \frac{0.16}{16} \approx 8.01\end{aligned}$$

Exemplo: Linearizar $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ em torno do ponto $(x_{e1}, x_{e2}) = (10, 20)$.

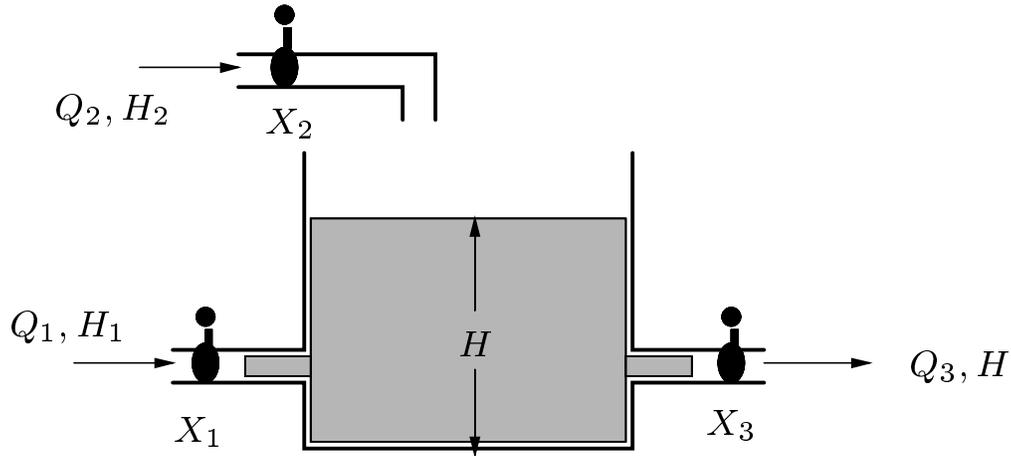
$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= f(x_{e1}, x_{e2}) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_{e1}, x_{e2})}(x_1 - x_{e1}) + \\&\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_{e1}, x_{e2})}(x_2 - x_{e2})\end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) = x_{e1}^2 + x_{e2} + 2x_{e1}(x_1 - x_{e1}) + 1(x_2 - x_{e2})$$

$$f(x_1, x_2) = 120 + 20(x_1 - 10) + (x_2 - 20)$$

$$f(x_1, x_2) \approx -100 + 20x_1 + x_2$$

Exemplo: Considere o tanque representado na figura a seguir:



A	área transversal do tanque
X_1, X_2, X_3	abertura das válvulas
H_1, H_2	altura de entrada do líquido
H	altura do líquido no tanque
Q_1, Q_2	vazões de entrada do líquido
H	vazão de saída
ρ	densidade do líquido

A modelagem matemática é dada por:

$$\begin{pmatrix} \text{massa} \\ \text{que} \\ \text{entra} \\ \text{durante} \\ \Delta t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{massa} \\ \text{que sai} \\ \text{durante} \\ \Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{massa} \\ \text{acumulada} \\ \text{no tanque} \\ \text{durante} \\ \Delta t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(Q_1 + Q_2)dt - \rho Q_3 dt &= \rho A dH \\ Q_1 + Q_2 - Q_3 &= A \frac{dH}{dt} \end{aligned}$$

É importante notar que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 X_1 \sqrt{H_1 - H} = Q_1(X_1, H_1, H) \\ Q_2 &= C_2 X_2 \sqrt{H_2} = Q_2(X_2, H_2) \\ Q_3 &= C_3 X_3 \sqrt{H} = Q_3(X_3, H) \end{aligned}$$

onde C_1, C_2, C_3 são constantes apropriadas.

A equação diferencial de primeira ordem:

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = A \frac{dH}{dt}$$

é não linear pois Q_i são funções não lineares de alturas. Podemos estudar o efeito de pequenas perturbações em

torno de um ponto do equilíbrio:

$$Q_e = (Q_{e1}, Q_{e2}, Q_{e3}) \quad \text{um dado valor de vazão}$$

$$X_e = (X_{e1}, X_{e2}) \quad \text{um dado valor de abertura}$$

$$H_1, H_2 \quad \text{constantes}$$

$$Q_1 = Q_{e1} + \frac{dQ_1}{dX_1} \Big|_{Q_e, X_e} (X_1 - X_{e1}) + \frac{dQ_1}{dH} \Big|_{Q_e, X_e} (Q - Q_e)$$

$$Q_2 = Q_{e2} + \frac{dQ_2}{dX_2} \Big|_{Q_e, X_e} (X_2 - X_{e2})$$

$$Q_3 = Q_{e3} + \frac{dQ_3}{dX_3} \Big|_{Q_e, X_e} (X_3 - X_{e3}) + \frac{dQ_3}{dH} \Big|_{Q_e, X_e} (Q_3 - Q_{e3})$$

Podemos escrever a aproximação linear como:

$$Q_1 = Q_{e1} + C_4 x_1 + C_5 h = Q_{e1} + q_1$$

$$Q_2 = Q_{e2} + C_6 x_2 = Q_{e2} + q_2$$

$$Q_3 = Q_{e3} + C_7 x_3 + C_8 h = Q_{e3} + q_3$$

Na condição de equilíbrio (ou seja, sem variações)

$$Q_{e1} + Q_{e2} = Q_{e3}$$

A equação diferencial linearizada é dada por:

$$A\dot{h} = q_1 + q_2 - q_3 = C_4 x_1 + C_6 x_2 - C_7 x_3 = (C_5 - C_8)h$$

Rearranjando termos:

$$A\dot{h} + (C_8 - C_5)h = C_4 x_1 + C_6 x_2 - C_7 x_3$$

Resolução de Equações Diferenciais Lineares

Equação Diferencial de Primeira Ordem

Dada a equação diferencial de primeira ordem:

$$\dot{x} - ax = u(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad t \geq 0$$

Onde $x(t)$ é uma função real da variável t e a é uma constante real, $x(0) = x_0$ é a condição inicial e $u(t)$ é a entrada. A variável a ser determinada é $x(t)$. Para a solução devemos determinar $x_h(t)$ solução do sistema autônomo e x_p uma solução particular para uma dada entrada. A solução geral:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

1. Obtenção de $x_h(t)$

$$\dot{x} - ax = 0$$

A solução da equação diferencial de primeira ordem autônoma é:

$$x_h(t) = C_1 e^{at}$$

C_1 : uma constante que depende da condição inicial.

O comportamento do sistema depende da variável a :

- Se $a > 0 \rightarrow$ sistema é instável
- Se $a < 0 \rightarrow$ sistema é assintoticamente estável
- Se $a = 0 \rightarrow$ sistema é estável

2. Obtenção de $x_p(t)$

$$\dot{x} - ax = u(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad t \geq 0$$

A solução particular $x_p(t)$ para o caso

$$u(t) = E$$

também será constante.

Seja $x_p(t) = K$

$$x_p(t) = K$$

Como a solução particular deve satisfazer a equação diferencial, temos:

$$\dot{x}_p - ax_p = E \quad \Rightarrow \quad -aK = E \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{E}{a}$$

A solução geral é:

$$x(t) = C_1 e^{at} - \frac{E}{a}$$

Em $t = 0$:

$$x(0) = C_1 - \frac{E}{a} = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0 + \frac{E}{a}$$

Equação Diferencial de Segunda Ordem

Dada a equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t) \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

1. Obtenção de $x_h(t)$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

Dada a semelhança desta equação com a equação de primeira ordem, vamos supor que a solução homogênea é do tipo:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Como a solução homogênea deve satisfazer a equação diferencial, temos:

$$\ddot{x}_h + a\dot{x}_h + bx_h = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

A equação acima é denominada equação característica da equação diferencial. Temos 2 casos a considerar:

a) **Raízes distintas** ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

b) **Raízes repetidas** ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

2. Obtenção de $x_p(t)$

A obtenção da solução particular depende de $u(t)$. A tabela a seguir fornece o tipo de solução particular a ser procurada para algumas das mais importantes funções de entrada.

$u(t)$	$x_p(t)$
K : constante	A : constante
$K t^k$	$A_0 + A_1 t + \dots + A_k t^k$
$K e^{\gamma t}$	$K e^{\gamma t}$
$K \cos \omega t$	$A \cos \omega t + B \sin \omega t$
$K \sin \omega t$	$A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Exemplo 1: $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

A equação característica associada é:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 ; \lambda_2 = -1$$

A solução da equação homogênea é:

$$x_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$$

Exemplo 2: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 1x = 0$

A equação característica associada é:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 ; \lambda_2 = -1$$

Como as raízes da equação característica são repetidas, a solução da equação homogênea é:

$$x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

Exemplo 3: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 13x = 0$

A equação característica associada é:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 + j2 ; \lambda_2 = -3 - j2$$

A solução da equação homogênea é:

$$x_h(t) = C_1 e^{-3t} e^{2jt} + C_2 e^{-3t} e^{-2jt}$$

Usando o fato que:

$$\begin{aligned}e^{2jt} &= \cos 2t + j \sin 2t \\e^{-2jt} &= \cos 2t - j \sin 2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_h(t) &= e^{-3t}[C_1(\cos 2t + j \sin 2t) + C_2(\cos 2t - j \sin 2t)] \\x_h(t) &= e^{-3t}[(C_1 + C_2) \cos 2t + j(C_1 - C_2) \sin 2t]\end{aligned}$$

Propriedade: C_1 e C_2 são constantes complexas conjugadas ou seja:

$$\left. \begin{aligned}C_1 &= c_1 + jc_2 \\C_2 &= c_1 - jc_2\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}C_1 + C_2 &= 2c_1 \\C_1 - C_2 &= -2c_2\end{aligned} \right.$$

Podemos reescrever a solução homogênea como:

$$\begin{aligned}x_h(t) &= 2e^{-3t}(c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t) \\x_h(t) &= Me^{-3t} \cos(2t + \Phi)\end{aligned}$$

A relação acima é obtida usando:

$$\left. \begin{aligned}M \cos \Phi &= 2c_1 \\M \sin \Phi &= 2c_2\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}M &= 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \tan \Phi &= \frac{c_2}{c_1}\end{aligned} \right.$$

Transformada de Laplace

1. Introdução
2. Definição
3. Propriedades
4. Teorema do valor final
5. Transformada inversa
6. Resolução de equações diferenciais
7. Função de transferência
8. Diagramas de blocos

Introdução

A transformada de Laplace converte equações integrais e diferenciais em equações algébricas. Desta forma a Transformada de Laplace torna-se uma técnica extremamente útil na solução de equações diferenciais lineares invariantes no tempo.

- aplica-se também para sinais em geral
- permite análise do regime transitório de um sistema
- serve para análise de circuitos
- facilita a manipulação de sistemas complicados, com integradores, derivadores, ganhos, etc

Definição

A transformada de Laplace de um sinal (ou de uma função) f é a função $F = \mathcal{L}\{f\}$ definida por:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

para s uma variável complexa.

- F é uma função complexa de números complexos
- s é uma variável complexa, ou variável frequência (em 1/segundos)
- t é a variável tempo
- st é sem unidade

Convenção: letras minúsculas denotam sinal, maiúsculas denotam a transformada de Laplace do sinal.

Exemplo: A transformada de Laplace do sinal u é U

$$U(s) = \mathcal{L}\{u\}$$

Exemplo: Função exponencial

Calcular a transformada de Laplace de $f(t) = e^t$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^t e^{-s} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt \\ &= \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

$F(s)$ está definida para todo $s \neq 1$.

Portanto,

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

Exemplo: Função constante ou função degrau

Calcular a transformada de Laplace de $f(t) = 1 ; t \geq 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Exemplo: Função cosseno

Calcular a transformada de Laplace de $f(t) = \cos \omega t$

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}$$

$F(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(-s+j\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(-s-j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Propriedades

A transformada de Laplace possui várias propriedades que são bastante utilizadas. As mais importantes são:

1. **Linearidade** Sejam duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ com transformadas de Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$ respectivamente e sejam α_1 e α_2 dois escalares:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

Exemplo: $f(t) = e^t + \cos \omega t$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{e^t + \cos \omega t\} = \mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{\cos \omega t\} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

2. **Translação em atraso** Seja $f(t)$ uma função, $u(t)$ o sinal degrau unitário e α uma constante. Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$, então

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha)u(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s)$$

3. **Teorema da diferenciação** Seja uma função $f(t)$ com transformada de Laplace $F(s)$:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\} = sF(s) - f(0)$$

- Diferenciação no tempo significa multiplicação por s no domínio da frequência
- Inclui um termo referente à condição inicial $f(0)$

Para derivadas de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\ddot{f}\} &= s\mathcal{L}\{\dot{f}\} - \dot{f}(0) \\ &= s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

- Os dois últimos termos referem-se às condições iniciais
- Expressões similares podem ser encontradas para derivadas de ordem superior

Exemplo: $f(t) = e^t, \dot{f} = e^t$

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{\dot{f}\} = \frac{1}{s-1}$$

Usando a fórmula:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\} = sF(s) - f(0) = s\frac{1}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

Exemplo: $f(t) = \sin \omega t = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \cos \omega t$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\omega} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega^2 - 1} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Usando a fórmula:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\} = sF(s) - f(0) = s\frac{1}{s-1} - 1 = \frac{1}{s-1}$$

Teorema do valor final

Quando uma função $f(t)$ tende a um valor constante quando $t \mapsto \infty$, este valor pode ser obtido calculando-se o limite no domínio da frequência:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- Se $f(t)$ não tende a um valor constante a igualdade acima não se verifica
- Ao invés de testar se $f(t)$ tende para um valor constante, podemos testar se os pólos de $sF(s)$ têm parte real negativa

Exemplo: Seja $f(t) = e^{-t}$ e $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = 1/(s + 1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$$

O mesmo resultado pode ser obtido calculando:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s + 1} = 0$$

isto pôde ser calculado pois o pólo de $s/(s + 1)$ é $s = -1$.

Transformada inversa

Conhecendo-se a transformada de Laplace de uma função é possível encontrar a função no tempo. Normalmente as transformadas e transformadas inversas podem ser encontradas em tabelas.

Na maioria dos casos é necessário manipular algebricamente as expressões para encontrar os valores tabelados. Isto é feito usando o método das frações parciais.

1. **Frações parciais para pólos distintos** Seja $F(s)$ dada por:

$$F(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

Quando os pólos de $F(s)$ são distintos, $F(s)$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(s) = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Os valores dos a_i podem ser calculados da seguinte forma:

$$a_i = (s + p_i)F(s)|_{s=-p_i}$$

- O método acima é conhecido como o método dos resíduos
- Pode-se obter os valores de a_i usando igualdade de polinômios
- Usando-se propriedades da transformada inversa pode-se calcular $f(t)$ mais facilmente usando a expansão em frações parciais.

No caso de $F(s)$ temos:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}k \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{a_1}{s + p_1} \right\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{a_n}{s + p_n} \right\} \\
 &= a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

Resolução de equações diferenciais

Normalmente a aplicação das leis que regem o comportamento dos sistemas levam a modelos matemáticos representados por equações diferenciais.

No caso geral, as equações diferenciais são não lineares e a linearização usando série de Taylor leva a um modelo simplificado, válido em torno do ponto de operação ou ponto de equilíbrio.

A solução de equações diferenciais é sempre trabalhosa e, na maioria dos casos, difícil de ser obtida. No caso de equações linearizadas com coeficientes constantes, a transformada de Laplace é uma ferramenta bastante útil para resolver sistemas de 1^a ordem, 2^a ordem ou mesmo de ordem superior. Esta técnica será apresentada na forma de exemplos:

1. Sistema de primeira ordem

O modelo matemático do circuito RC ou o modelo linearizado do tanque é dado por uma equação diferencial do tipo:

$$\tau \dot{x} + x = u(t) \quad x(0) = x_0$$

Encontrar a solução da equação diferencial usando a transformada de Laplace.

Aplicando-se a transformada de Laplace de ambos os lados da equação temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\tau\dot{x} + x} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ \mathcal{L}\{\tau\dot{x}\} + \mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ \tau\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{u(t)\}\end{aligned}$$

Usando o fato que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x\} &= X(s) \\ \mathcal{L}\{u\} &= U(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau sX(s) - \tau x(0) + X(s) &= U(s) \\ X(s) &= \frac{\tau}{\tau s + 1}x(0) + \frac{1}{\tau s + 1}U(s)\end{aligned}$$

Tomando-se a transformada inversa temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \frac{\tau}{\tau s + 1}x(0) + \frac{1}{\tau s + 1}U(s) \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau}{\tau s + 1}x(0)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\tau s + 1}U(s)\right\}\end{aligned}$$

- Para $\tau = 10$, $u = 0$ e $x(0) = 2$ a solução da equação

homogênea é dada por (usando a tabela de Laplace):

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{10s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.2}{s+0.1}\right\} \\x(t) &= 0.1e^{-0.1t}x(0) = 0.2e^{-0.1t}\end{aligned}$$

- Para $\tau = 10$, $u = 1$ (degrau unitário) e $x(0) = 0$ temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u\} &= U(s) = \frac{1}{s} \\x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(10s+1)}\right\} \\x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.1}{s(s+0.1)}\right\} = \\x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0.1}\right\} \\x(t) &= 0.1 - e^{-0.1t} \quad t \geq 0\end{aligned}$$

2. Sistemas de segunda ordem

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = u(t) \quad x(0), \dot{x}(0) : \text{ dados}$$

Usando o fato que:

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{u\} = U(s)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

Tomando-se a transformada de ambos os lados da equação temos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = u(t)\} \\ & \{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \\ & 2\{sX(s) - x(0)\} + 5X(s) = U(s) \\ X(s) = & \frac{s+2}{s^2+2s+5}x(0) + \frac{1}{s^2+2s+5}\dot{x}(0) + \\ & \frac{1}{s^2+2s+5}U(s) \end{aligned}$$

- Para $u = 0$ a solução da equação homogênea é dada por (usando a tabela de Laplace):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ & \frac{s+1}{s^2+2s+5}x(0) + \frac{1}{s^2+2s+5}x(0) \\ & + \frac{1}{s^2+2s+5}\dot{x}(0)\} \end{aligned}$$

$$x(t) = 0.5e^{-t}[\cos 2t + \sin 2t]x(0) + 0.5e^{-t} \sin 2t\dot{x}(0)$$

- Para $u = 3$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ temos:

$$\mathcal{L}\{3\} = \frac{3}{s}$$

No domínio de Laplace, temos:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \frac{3}{s} = \frac{3}{(s(s^2 + 2s + 5))}$$

$$X(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

$$X(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{5s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{5s} \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{5s} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right\}$$

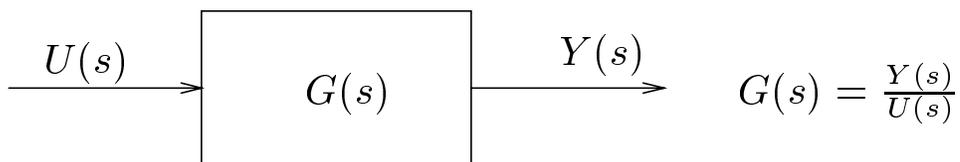
$$x(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} e^{-t} [\sin 2t - \cos 2t] \quad t \geq 0$$

Função de transferência

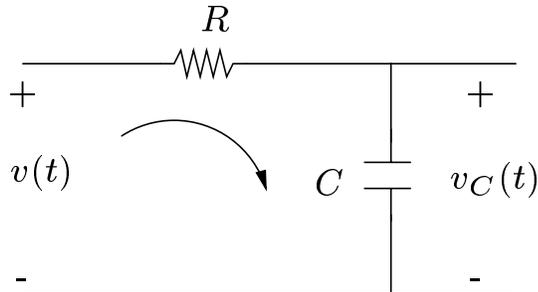
Para um sistema linear cujo comportamento é descrito por equações diferenciais:

- Lineares
- Coeficientes constantes
- Condições iniciais nulas:
 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \dots x^{(n-1)}(0) = 0$

Define-se **Função de Transferência** como sendo a relação entre a transformada de Laplace da saída pela entrada conforme mostrado:



1. Determinar a função de transferência do circuito RC



O circuito RC é modelado por uma equação diferencial de primeira ordem:

$$RC\dot{v}_C + \frac{1}{C}v_C(t) = v(t)$$

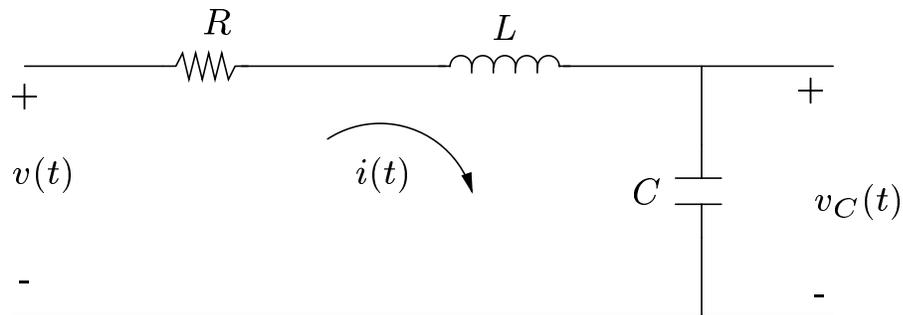
Tomando-se a transformada de Laplace com condições iniciais nulas temos:

$$(RCs + 1)V_c(s) = V(s)$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} =$$

2. Determinar a função de transferência do circuito RLC



O circuito RLC é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem:

$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + \frac{1}{C}v_C(t) = v(t)$$

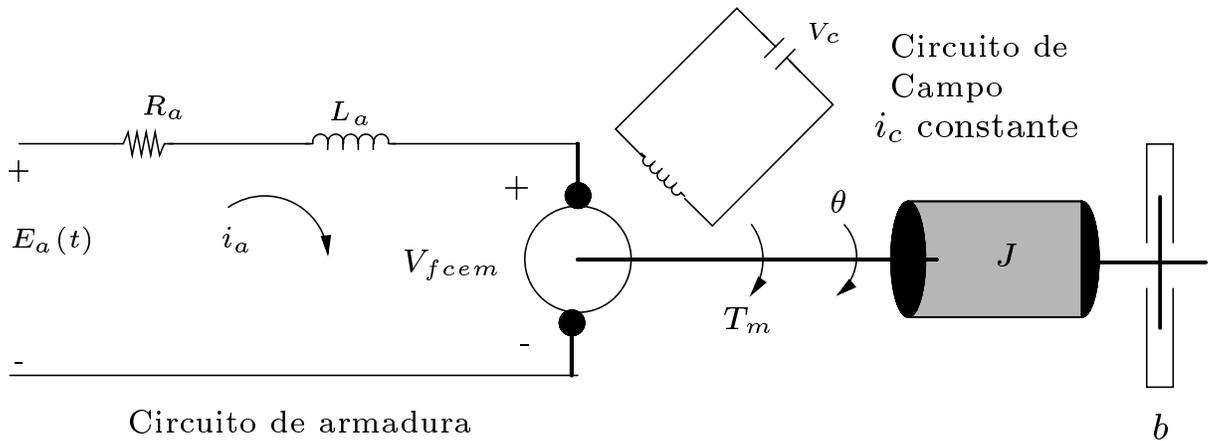
Tomando-se a transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$LCs^2V_C(s) + RCsV_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

3. Determinar a função de transferência para o motor CC



O comportamento do sistema mecânico e do sistema elétrico é dado pelas equações diferenciais

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = E_a(t)$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = K i_a$$

Tomando-se a transformada de Laplace de ambas as equações com condições iniciais nulas:

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + K_b s \theta(s) = E_a(s)$$

$$J s^2 \theta(s) + b \theta(s) = K I_a(s)$$

Normalmente, para o Motor CC o objetivo é encontrar a relação entre a tensão de entrada E_a e a posição angular do motor θ . Ou seja, a função de transferência procurada é:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{E_a(s)}$$

$$KI_a(s) = Js^2\theta(s) + b\theta(s)$$

$$I_a(s) = \frac{Js^2 + bs}{K}\theta(s)$$

$$E_a(s) = (L_a s + R_a)I_a(s) + K_b s\theta(s)$$

$$E_a(s) = (L_a s + R_a)\frac{Js^2 + bs}{K}\theta(s) + K_b s\theta(s)$$

$$KE_a(s) = (JL_a s^3 + L_a b s^2 + JR_a s^2 + R_a b s + KK_b s)\theta(s)$$

Portanto:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{E_a(s)}$$

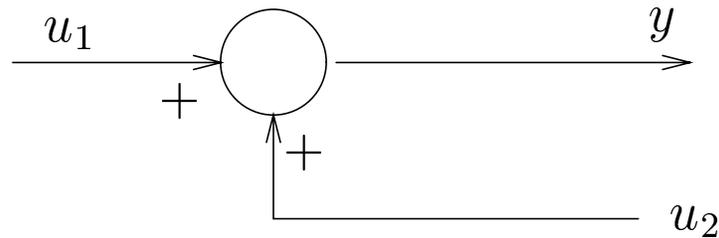
$$G(s) = \frac{K}{JL_a s^3 + (L_a b + JR_a) s^2 + (R_a b + KK_b) s}$$

Diagrama de blocos

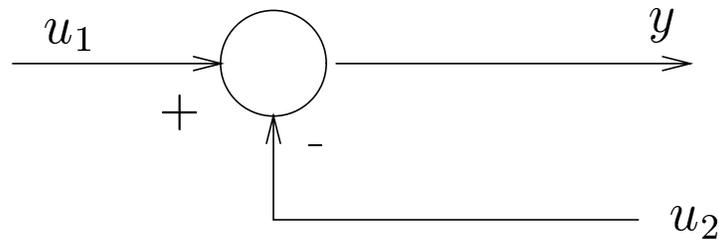
A representação por diagramas de blocos é uma ferramenta importante para a análise e projeto de sistemas de controle.

Considere duas entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e uma saída $y(t)$

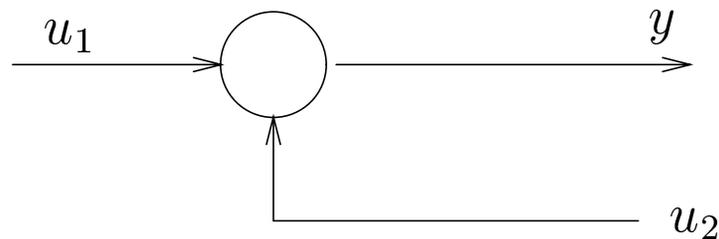
- **Soma:** $y(t) = u_1(t) + u_2(t)$



- **Diferença:** $y(t) = u_1(t) - u_2(t)$

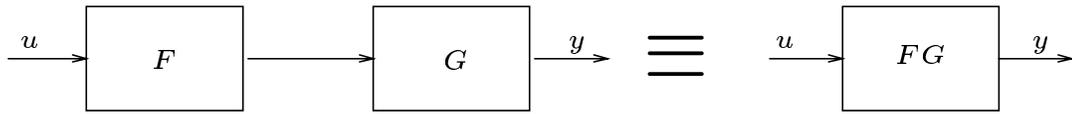


- **Multiplicação:** $y(t) = u_1(t)u_2(t)$

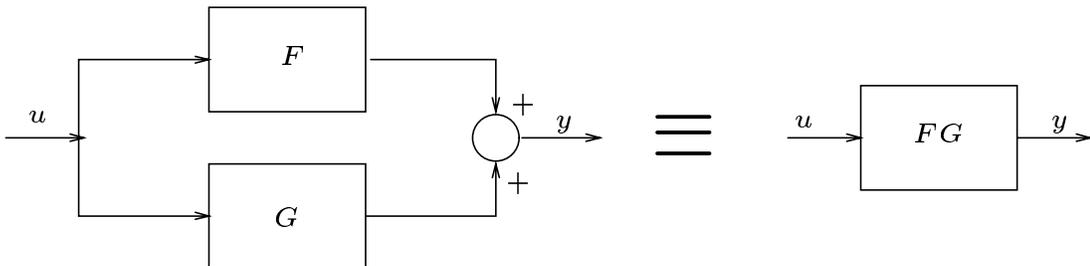


Dados dois sistemas com funções de transferência F e G :

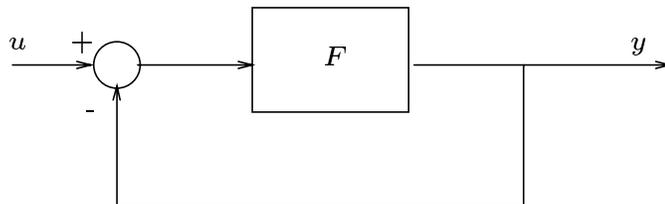
- Interconexão em cascata (ou série)



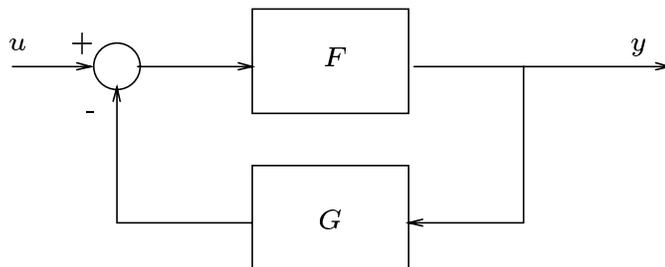
- Interconexão em paralelo (ou soma)



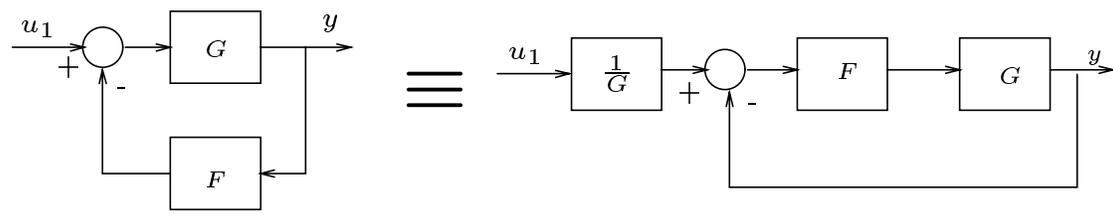
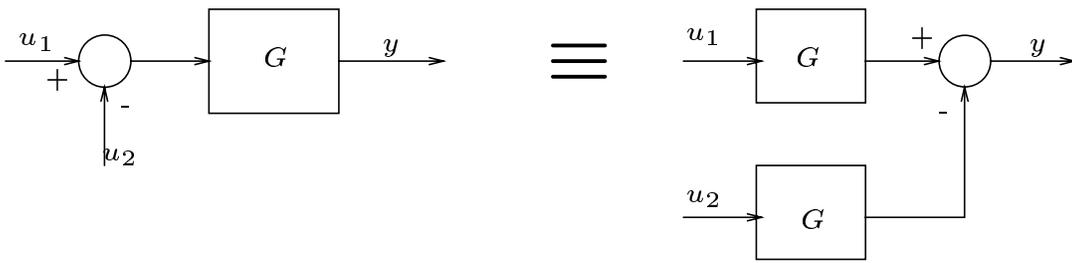
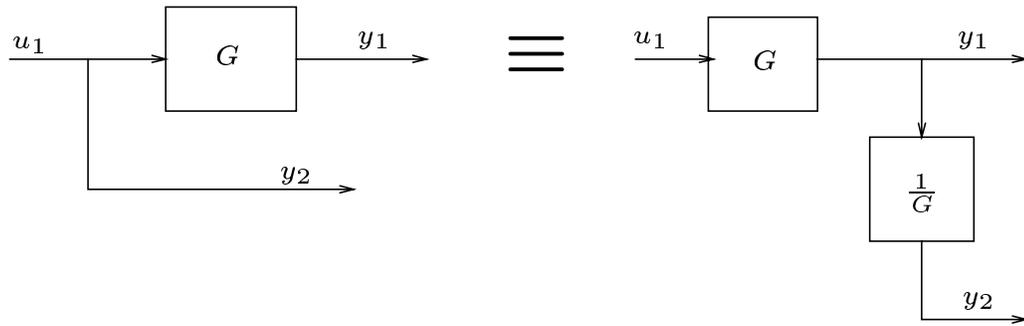
- Realimentação unitária



- Realimentação não unitária



Diagramas equivalentes:



Resposta Temporal

1. Introdução
2. Sistemas de primeira ordem
3. Sistemas de segunda ordem
4. Índices de desempenho
5. Identificação de sistemas

Resposta Temporal

Existem vários sinais testes para sistemas de controle. Na resposta temporal o mais comum deles é o degrau de amplitude unitária.

Em um grande número de problemas de controle o objetivo é manter constante o valor da variável de saída.

- Posicionamento de uma antena
- Controle de temperatura em um forno industrial
- Controle de nível em um tanque, etc

Em muitos destes problemas, devemos mudar a posição inicial do sistema para uma dada posição final. Por exemplo, no caso da antena, queremos mudá-la da posição em que se encontra para uma posição pré estabelecida, direcionando-a para um dado objetivo.

Outros sinais importantes do ponto de vista de sinais de controle são:

- Impulso
- Rampa
- Sinais senoidais

Os dois primeiros podem ser analisados a partir do degrau unitário pois:

- Impulso é a derivada do degrau unitário
- Rampa é a integral do degrau unitário

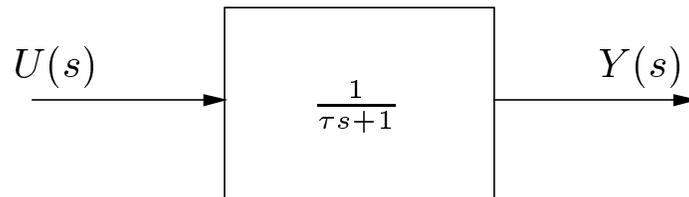
Sistemas de primeira ordem

A função de transferência de um sistema de primeira ordem é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- O sistema possui apenas um pólo em $s = -1/\tau$
- A constante de tempo $\tau = RC$

A figura a seguir mostra a relação entrada-saída de um sistema de primeira ordem padrão:



A resposta ao degrau é dada por:

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} U(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

A resposta temporal é dada por:

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}$$
$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

- A inclinação da reta tangente à resposta em $t = 0$ fornece a característica da resposta.

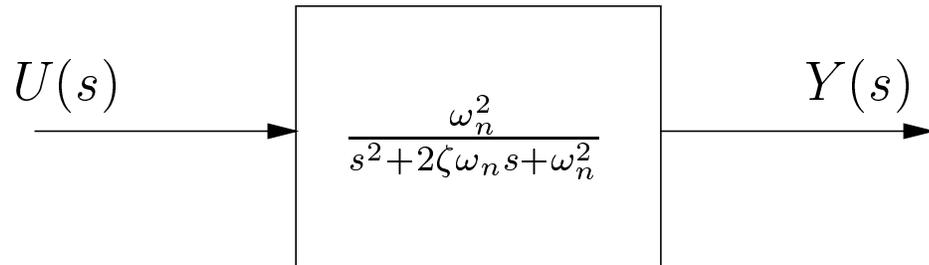
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = \frac{1}{T} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} \mapsto 0 & : \text{ sistema lento} \\ \frac{dy}{dt} \mapsto \infty & : \text{ sistema rápido} \end{cases}$$

- $y(T) = 1 - e^{-1} = 0.636$. A resposta do sistema está a 63% do valor final em regime permanente
- $y(2T) = 1 - e^{-2} = 0.865 \Rightarrow 83\%$ do valor final
- $y(3T) = 1 - e^{-3} = 0.95 \Rightarrow 95\%$ do valor final
- $y(4T) = 1 - e^{-4} = 0.982 \Rightarrow 98\%$ do valor final
- $y(5T) = 1 - e^{-5} = 0.993 \Rightarrow 99\%$ do valor final

As propriedades acima podem ser utilizadas quando queremos levantar experimentalmente as características de um processo.

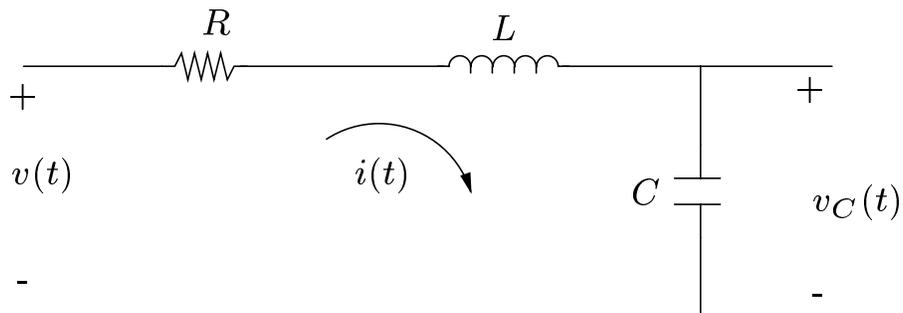
Sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem na forma padrão é dado por:



- ζ coeficiente de amortecimento
- ω_n frequência natural do sistemas

Considere o caso do sistema RLC:



A função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Comparando com a forma padrão temos:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

- ζ depende linearmente da resistência do circuito
- A resistência é responsável pela dissipação de energia
- As oscilações da resposta dependem da indutância e da capacitância

1. Sistema sem amortecimento ($\zeta = 0$)

No caso de não haver amortecimento não há dissipação de energia.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

- $p_1 = j\omega_n$, $p_2 = -j\omega_n$

A resposta ao degrau unitário é:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

2. Sistema sub amortecimento ($0 < \zeta < 1$)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_1, p_2 = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\sigma^2 - 1}$$

Os pólos são da forma:

$$p_1, p_2 = \sigma \pm j\omega_d$$

- $\sigma = -\zeta\omega_n$ é a parte real dos pólos
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ é a frequência natural amortecida

A resposta ao degrau unitário é:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

Usando a transformada inversa temos:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{\sigma t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

3. Sistema sobre amortecido ($\zeta \geq 1$)

No caso do coeficiente de amortecimento ser maior que 1, os pólos de $G(s)$ são:

$$p_1, p_2 = \sigma \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Os pólos são reais e negativos

A resposta do sistema para um degrau unitário é

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + p_1)(s + p_2)} \frac{1}{s}$$

Aplicando-se a transformada inversa temos:

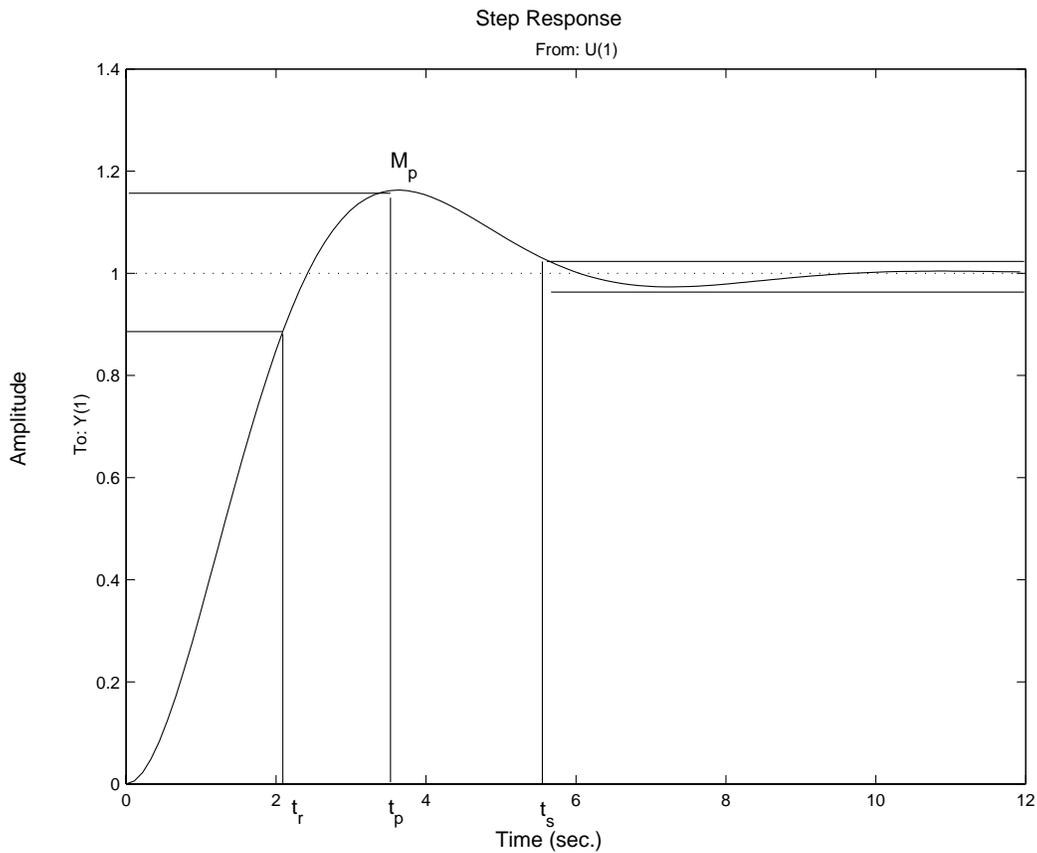
$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2}} \left\{ \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right\}$$

Índices de desempenho

Os índices de desempenho normalmente são utilizados para definir a qualidade da resposta. Os índices mais usados são:

- **Sobressinal máximo:** M_p É a relação entre o valor máximo que a resposta atinge e o valor de regime. Este valor, em muitos casos, está associado a questões de segurança tais como: tensão máxima que um circuito pode suportar, máxima deformação que uma estrutura pode suportar sem que haja ruptura do material, etc
- **Tempo de sobressinal ou de pico:** t_p É o instante em que ocorre o sobressinal
- **Tempo de acomodação:** t_s É o tempo necessário para que a resposta atinja o valor de regime. Normalmente utiliza-se valores de 5% ou 2% acima ou abaixo do valor de regime como variação aceita.
- **Tempo de subida:** t_r É o tempo necessário para que a resposta do sistema atinja, pela primeira vez, 90% do valor de regime. Este parâmetro está associado à velocidade de resposta do sistema. Sistemas rápidos têm pequenos valores de t_r e sistemas lentos têm valores altos de t_r .

Para um sistema de segunda ordem, estes valores estão indicados no gráfico mostrado a seguir.



RESPOSTA DE SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

- As especificações são obtidas para sistemas de segunda ordem sem zeros
- A maioria dos sistemas encontrados na prática são mais complexos que sistemas de segunda ordem sem zeros. As especificações fornecem parâmetros de comparação entre sistemas mais complexos e sistemas de segunda ordem.

A resposta ao degrau unitário de um sistema de segunda ordem é dada por:

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\sigma = \zeta \omega_n$.

Para a obtenção do sobressinal máximo devemos encontrar o valor de t tal que a derivada da saída é nula:

$$\frac{dy}{dt} = \sigma e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - e^{-\sigma t} (-\omega_d \sin \omega_d t + \sigma \cos \omega_d t) = 0$$

Reescrevendo a equação acima temos:

$$-e^{-\sigma t} \left(-\frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin \omega_d t + \omega_d \sin \omega_d t \right) = 0$$

A primeira vez que o valor máximo ocorre é para $\omega_d t = 0$, ou seja:

$$\omega_d t_p = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Substituindo o valor de t_p na equação da resposta temos:

$$\begin{aligned}y(t_p) &= 1 + M_p \\ &= 1 - e^{-\frac{\sigma \pi}{\omega_d}} \left(\cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) \\ &= 1 + e^{-\frac{\sigma \pi}{\omega_d}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_p = e^{-\sigma \pi} \omega_d = e^{-\zeta \pi} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad 0 \leq \zeta < 1$$

Um outro parâmetro importante na especificação da qualidade da resposta de um sistema é o tempo de acomodação $t_s(5\%)$ ou $t_s(2\%)$. O tempo de acomodação é dado dentro de uma precisão de 5% ou 2%.

Não existe valor exato para o tempo de acomodação e, por analogia com sistemas de primeira ordem, temos:

$$\begin{aligned}t_s(5\%) &= 3\tau = \frac{3}{\zeta \omega_n} \\ t_s(2\%) &= 4\tau = \frac{4}{\zeta \omega_n}\end{aligned}$$

Resumo dos índices de desempenho

- Instante de pico t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Sobressinal máximo M_p

$$M_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\sigma\pi} \omega_d = e^{-\zeta\pi} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

- Tempo de acomodação t_s

$$t_s(5\%) = 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

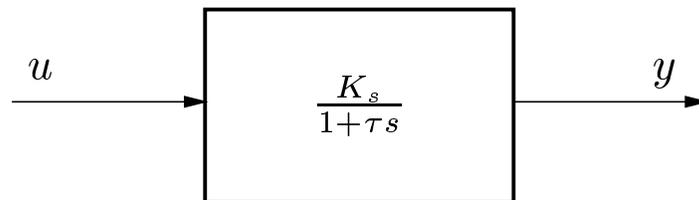
Identificação de sistemas

Um dos métodos de identificação de sistemas é obtenção dos parâmetros de um sistema a partir dos sinais temporais de entrada e saída.

- **Identificação direta:** os sinais de entrada e de saída do próprio sistema a ser identificado são usados para a determinação de seus parâmetros.
- Identificação indireta: o sistema a ser identificado é realimentado por um ganho constante. Neste caso identifica-se os parâmetros dos sistema realimentado.

Identificação de sistemas de primeira ordem

Modelo:



Onde $y(t)$ é a saída, K_s é o ganho estático e τ é a constante de tempo do sistema.

Para uma entrada do tipo degrau, os parâmetros K_s e τ podem ser obtidos através da resposta em regime $y(\infty)$, da

amplitude do sinal de entrada U e do tempo de resposta a 5%, $t_s(5\%)$:

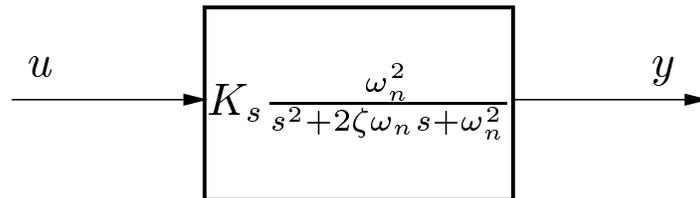
$$K_s = \frac{y(\infty)}{U} \quad \tau = \frac{t_s(5\%)}{3}$$

O tempo de resposta a 5% é o tempo necessário para o sinal de saída atingir e permanecer dentro de uma faixa de 5% do seu valor de regime. Para o sistema de primeira ordem:

$$y(t_s(5\%)) = 0.95y(\infty)$$

Identificação de sistemas de segunda ordem

Modelo:

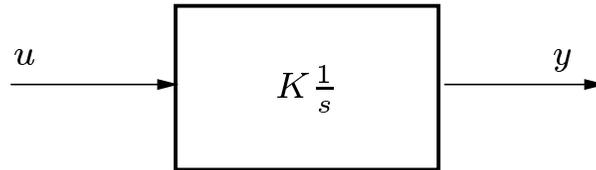


Onde $u(t)$ é a entrada, $y(t)$ é a saída, K_s é o ganho estático e ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema e ω_n é a frequência natural do sistema.

Os parâmetros K_s , ζ e ω_n podem ser obtidos através da resposta em regime $y(\infty)$, do valor do sobressinal máximo y_p e de t_p , o instante de tempo onde o sobressinal máximo ocorre.

$$K_s = \frac{y(\infty)}{U} \quad a = \ln \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}$$
$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \pi^2}} \quad \omega_n = \sqrt{a^2 + \pi^2} t_p$$

Identificação de um integrador

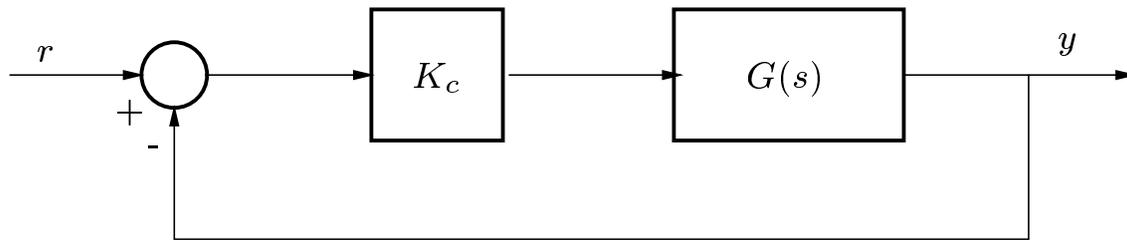


O ganho K pode ser determinado utilizando-se duas medidas do sinal de saída. Sejam y_1 e y_2 duas medidas tomadas, respectivamente, nos instantes t_1 e t_2 .

$$K = \frac{1}{U} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

Identificação indireta

Considere o sistema realimentado:



O objetivo é identificar a função de transferência $G(s)$.

- Realimenta-se o sistema com um ganho constante K_c
- Aplica-se um degrau de amplitude U como referência e mede-se a saída $y(t)$ do sistema

A função de transferência em malha fechada é:

$$M(s) = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)}$$

A função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{K_c} \frac{M(s)}{1 - M(s)}$$

- **Sistema de primeira ordem**

Se $G(s)$ é de primeira ordem então o mesmo vale para $M(s)$. Ou seja, $M(s)$ é da forma:

$$M(s) = K_s \frac{1}{1 + \tau s}$$

Identificando-se $M(s)$ temos:

$$G(s) = \frac{K_s}{K_c} \frac{1}{\tau s + (1 - K_s)}$$

- **Sistema de segunda ordem**

Se $G(s)$ é de segunda ordem então o mesmo vale para $M(s)$. Ou seja, $M(s)$ é da forma:

$$M(s) = K_s \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Identificando-se $M(s)$ temos:

$$G(s) = \frac{K_s}{K_c} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (1 - K_s)\omega_n^2}$$